Nonintegrability of Dynamical Systems near Equilibria and Heteroclinic Orbits(Abstract_要旨)

AUTHOR(S):

Yamanaka, Shogo

様式Ⅵ

博士学位論文調査報告書

論文題目　Nonintegrability of Dynamical Systems near Equilibria and Heteroclinic Orbits
（平衡点およびヘテロクリニック軌道の近傍における力学系の非可積分性）

申請者氏名　山中　祥五

最終学歴　平成２９年　３月
京都大学大学院　情報学研究科　数理工学　専攻修士課程　修了
令和　２年　３月
京都大学大学院　情報学研究科　数理工学　専攻博士後期課程
研究指導認定見込

学識確認　令和　　年　　月　　日（論文博士のみ）

論文調査委員　京都大学大学院情報学研究科
（調査委員長）　教　授　　矢ヶ崎　一幸

論文調査委員　京都大学大学院情報学研究科
教　授　　中村　佳正

論文調査委員　京都大学大学院情報学研究科
教　授　　梅野　健

（ 続紙 １ ）

京都大学	博士（情報学）	氏名	山中祥五
論文題目	Nonintegrability of Dynamical Systems near Equilibria and Heteroclinic Orbits （平衡点およびヘテロクリニック軌道の近傍における力学系の非可積分性）		

（論文内容の要旨）

微分方程式系の非可積分性は力学系理論における古典的かつ重要な研究テーマのひとつである。また、ハミルトン系に対しては1980年代から90年代にかけてZiglin解析やMorales-Ramis理論など非可積分性判定手法が提案され、その後急速に研究が進展している。さらに、AyoulとZungにより、ハミルトン系ではない場合に対してMorales-Ramis理論が拡張され、さまざまな非ハミルトン系の非可積分性も調べられている。

本論文では、必ずしもハミルトン系とは限らない一般的な微分方程式系を取りあげ、平衡点およびヘテロクリニック軌道近傍における可積分判定および非可積分判定のための理論を与えている。さらに、２自由度ハミルトン系に対して、ヘテロクリニック軌道近傍における非可積分性と力学系的な性質の関係を論じている。

本論文は以下の５章から構成されている。

第１章では、力学系理論における可積分性の研究の発展と非可積分性判定手法について概説し、Poincaré-Dulac標準形や非可積分系の力学系的な性質に関する本研究の背景、目的および論文の構成を述べている。

第２章では、平衡点におけるPoincaré-Dulac標準形に対して、可積分であるための十分条件を与えている。また、標準形が最大個数の保存量をもつために、この条件が必要であることも証明している。さらに、共鳴次数が１以下の場合には、標準形は常に可積分であることを示し、ハミルトン系におけるBirkhoff標準形に対する既知のものと類似な結果が一般的な微分方程式系に対しても成り立つことを明らかにしている。力学系の分野において重要な、余次元２の分岐であるfold-Hopf分岐に対する標準形に対して、これらの結果を適用し、理論の有用性を示している。

第３章では、２つのサドル・センター型平衡点を連結するヘテロクリニック軌道を有する一般的な微分方程式系を取りあげ、AyoulとZungによるMorales-Ramis理論の拡張と次数２の特殊線形群の分類を用いて、可積分な力学系においては、ヘテロクリニック軌道まわりの直交変分方程式に対する２つのモノドロミー行列が可換となることを証明している。さらに、平衡点におけるヤコビ行列の固有値がある特別な条件を満たす場合には、その２つのモノドロミー行列が等しいか逆行列になることも示している。また、得られた結果を適用し、 流体力学におけるSTF流れと呼ばれる定常ストークス方程式が非可積分であるための十分条件を与えている。

第４章では、２自由度ハミルトン系を取りあげ、不変平面をもち、その上に２つのサドル・センター型平衡点とそれらを連結するヘテロクリニック軌道を有するという仮定の下で、ヘテロクリニック軌道近傍における非可積分性と力学系的な性質の関係を論じている。このとき、リヤプノフの中心定理により、平衡点近傍には周期軌道族が存在する。まず、２つの平衡点におけるヤコビ行列の純虚固有値が等しい場合、拡張されたMelnikovの方法を用いることにより、第３章で与えた非可積分であるための十分条件が成り立つならば、周期軌道の不安定多様体と安定多様体が横断的に交差す

ることを証明している。一方、それらが異なる場合には、たとえ、系が可積分であっても不安定多様体と安定多様体が一致しないなど、ヘテロクリニック軌道特有の現象が起こることを示している。さらに、４次のポテンシャルをもつ２自由度ハミルトン系に対して得られた理論結果を適用し、２つの平衡点まわりの周期軌道の安定多様体と不安定多様体に対する数値計算も行い、理論結果の有用性や有効性を明らかにしている。

　最後に、第５章では、本論文で得られた結果を要約し、今後の課題について述べている。

(続紙　２　)

（論文審査の結果の要旨）

本論文では、一般的な微分方程式系に対して、平衡点およびヘテロクリニック軌道近傍における可積分判定および非可積分判定のための理論を与え、また、２自由度ハミルトン系に対しては、ヘテロクリニック軌道近傍における非可積分性と力学系的な性質の関係を論じている。研究成果は以下の通りである。

１．Poincaré-Dulac標準形の局所可積分性

平衡点近傍における力学系の性質を調べる手法として、Poincaré一Dulac標準形がある。可積分系の場合、収束する無限級数で与えられる変換により可積分なPoincaré-Dulac標準形に変換することができるが、一般にPoincaré-Dulac標準形自体が可積分とは限らない。ハミルトン系における類似の標準形であるBirkhoff標準形に対しては、その可積分性に関していくつかの研究があるが、申請者はこれまで研究されてこなかったPoincaré-Dulac標準形の可積分性を論じている。

平衡点におけるヤコビ行列の固有値が満たす線形関係式を共鳴条件と呼び、共鳴条件を満たす整数ベクトルのなす空間の次元を共鳴次数と呼ぶ。申請者は、共鳴条件に応じて可換な線形ベクトル場を定めることで、Poincaré-Dulac標準形が可積分であるための十分条件を与えている。一方、最大個数の保存量をもつためにはこの条件が必要条件でもあることも明らかにしている。さらに、共鳴次数が１以下の標準形が必ず可積分であることを示し、２以上の各整数の共鳴次数に対して非可積分な標準形の例を与えている。これらの結果は、ハミルトン系のBirkhoff標準形に対しては類似の結果が知られており、標準形を用いて可積分性を調べる際の基礎となるものと考えられる。

２．一般的な微分方程式系のヘテロクリニック軌道近傍における非可積分性

力学系において、無限大の時間をかけてある平衡点から別の平衡点に移動する軌道をヘテロクリニック軌道といい、２つの平衡点が一致するときはホモクリニック軌道という。ホモクリニックおよびヘテロクリニック軌道は力学系のダイナミクスを理解する上で重要なものである。

申請者は、不変多様体上にヘテロクリニック軌道をもつ一般的な微分方程式系に対して、不変多様体に直交する方向の直交変分方程式のモノドロミー行列を用いて、非可積分性の十分条件を与えている。この結果はハミルトン系におけるモノドロミー行列による非可積分性判定手法であるZiglin解析を非ハミルトン系の場合に拡張したものとみなすことができる。

３．２自由度ハミルトン系に対する可積分性と力学系的な性質の関係

非可積分性と力学系的な性質の関係は、数学的にはいまだ完全に明らかにされていないのが現状である。特に、非可積分ハミルトン系はカオス的であることが期待されるものの、数学的にそのことを示した研究は、ホモクリニック軌道をもつ２自由度ハミルトン系に対するものに限られていた。

申請者は、ヘテロクリニック軌道をもつ２自由度ハミルトン系を取りあげ、自身の一般的な微分方程式系に対する可積分判定の理論を適用し、非可積分性の十分条件と力学系的な性質の関係を調べている。特に、ホモクリニック軌道の場合の結果を拡張し、平衡点の純虚固有値が一致し、非可積分性の十分条件が成り立つならば、周期軌道の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差することを示している。また、４次の

ポテンシャルをもつハミルトン系に対して理論結果を適用し、安定多様体と不安定多様体の数値計算をも行って、その有効性および有用性を確認している。

以上のように、本論文は、平衡点およびヘテロクリニック軌道の近傍における力学系の可積分性に関して新たな理論を構築し、さらに、２自由度ハミルトン系に対する非可積分性と力学系的性質の関係を明らかにするなど、力学系理論の発展に貢献する研究として高く評価されるものである。よって、本論文は博士（情報学）の学位論文として価値あるものとして認める。また、令和２年２月１７日に実施した論文内容とそれに関連した試問の結果合格と認めた。なお、本論文のインターネットでの全文公表ついても支障がないことを確認した。

要旨公開可能日：　　　　　年　　　月　　　日以降